

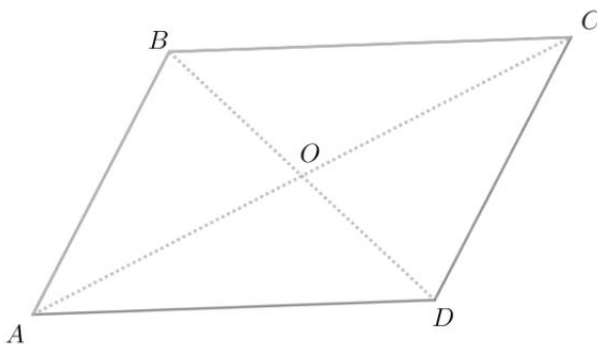


5math

הוקטור הגאומטרי - חוברת תרגילים

כפל וקטור בסקלר

תרגיל 1



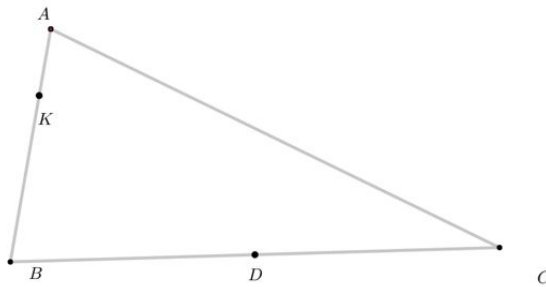
נתונה מקבילית ABCD. מסומן:

$$\overline{AB} = \underline{u}, \quad \overline{AD} = \underline{v}$$

O נקודת המפגש של אלכסוני המקבילית.

הבע את הווקטור \overline{AO} באמצעות \underline{u} , \underline{v} .

תרגיל 2



נתון משולש ABC.

נתון: צלעות המשולש $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AC} = \underline{v}$.

הנקודה K נמצאת על הצלע AB כך ש:

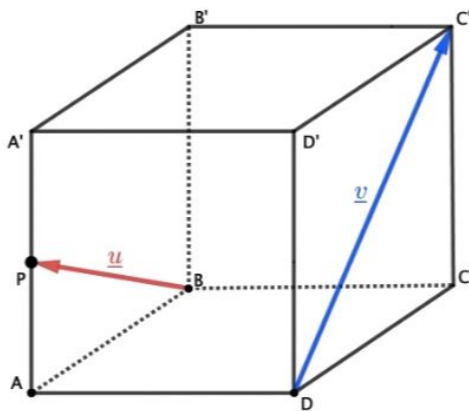
$$AK:KB=2:5$$

א. הבע ואת הווקטור \overline{AK} באמצעות \underline{u}

ב. הבע באמצעות \underline{u} ו \underline{v} את הווקטור \overline{AD} , התיכון לצלע CB

ג. הבע באמצעות \underline{u} ו \underline{v} את הווקטור \overline{KD}

תרגיל 3



נתונה תיבה ABCD'A'B'C'D'.

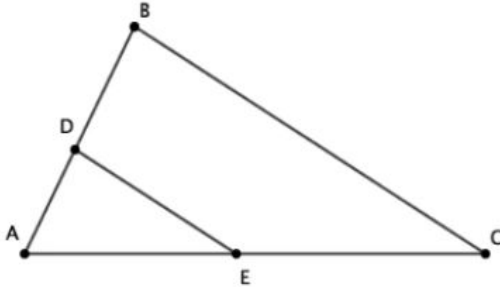
נתון שהנקודה P היא אמצע המקצוע AA'.

$$\text{נסמן } \overline{DC'} = \underline{v} \text{ ו } \overline{BP} = \underline{u}$$

א. הבע באמצעות AA' ו AB את הווקטורים \underline{u} ו \underline{v}

ב. הבע באמצעות \underline{u} ו \underline{v} את AB

תלות לינארית



תרגיל 1

במשולש ABC נסמן $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AC} = \underline{v}$

הנקודה E נמצאת על הקטע AC כך ש: $AC=4AE$

הנקודה D נמצאת על הקטע בין AB כך ש:

$$AD:DB=1:3$$

א. הוכח כי DE מקביל ל BC

ב. מצא פי כמה גדול אורך הצלע BC מאורך קטע DE

תרגיל 2

נתון טרפז ABCD ש: $AB \parallel DC$

נסמן $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{DA} = \underline{v}$

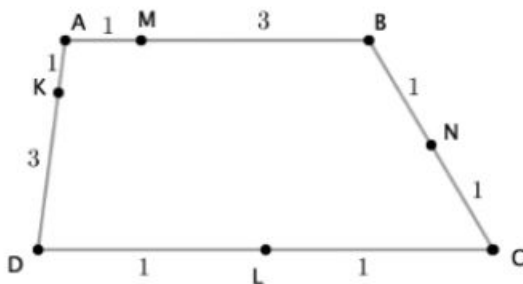
עוד מתקיים כי: $DC = \frac{2}{3} AB$

$$DK:KA = 3:1$$

$$AM:MB = 1:3$$

$$DL:LC = 1:1$$

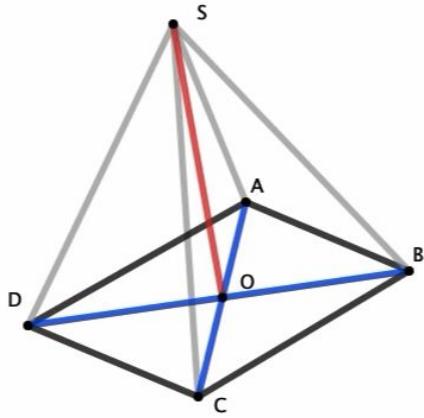
$$BN:CN = 1:1$$



א. הבע את \overline{LN} ו \overline{KM} באמצעות \underline{u} ו \underline{v}

ב. הוכח כי $KM \parallel LN$ ומצא פי כמה גדול הקטע LN מהקטע KM

תרגיל 3



נתון טטראדר SABC. נסמן:

$$\overrightarrow{SA} = \underline{u}$$

$$\overrightarrow{SB} = \underline{v}$$

$$\overrightarrow{SC} = \underline{w}$$

O נקודת מפגש תיכוני הבסיס

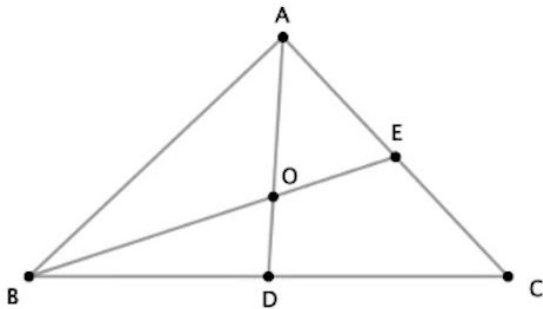
P נקודת מפגש תיכוני הבסיס SBC

א. הוכח כי הווקטור \overrightarrow{OP} מקביל למקצוע הצדדי AS

ב. מצא את יחס האורכים בין המקצוע SA ל \overrightarrow{OP}

יחידות ההצגה

תרגיל 1



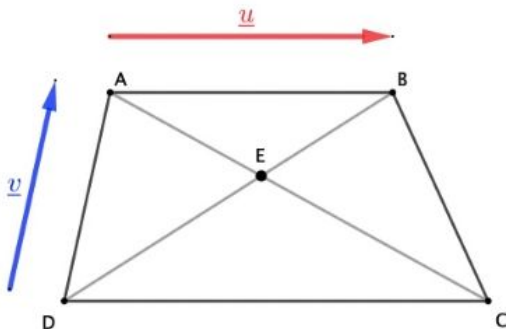
במשולש ABC

$$\overline{AC} = \underline{v} \quad \overline{AB} = \underline{u}$$

נסמן: $\overline{AC} = \underline{v}$ $\overline{AB} = \underline{u}$
 AD ו BE תיכונים במשולש כאשר O הוא נקודת מפגש
 בין התיכונים.

הוכח כי הנקודה O מחלקת את שני התיכונים AD ו BE ביחס של 2:1

תרגיל 2



נתון טרפז ABCD ($AB \parallel CD$)

בעבורו נסמן:

$$\overline{DA} = \underline{v}$$

$$\overline{AB} = \underline{u}$$

ומתקיים

$$DC = \frac{3}{2} AB$$

מצא באיזה יחס מחלקת נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז את האלכסונים.

תרגיל 3

נתונה פירמידה $SABCD$.

נסמן:

$$\overline{AS} = \underline{w} \quad \overline{AB} = \underline{v} \quad \overline{AD} = \underline{u}$$

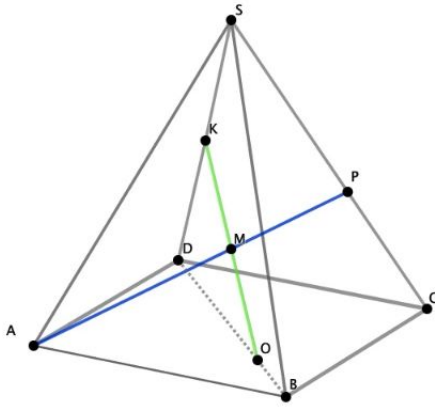
$$\overline{SP} = a \cdot \overline{SC} \quad \text{עוד נתון כי מתקיים:}$$

K הוא אמצע המקצוע הצדדי SD

והנקודה O מחלקת את BD ביחס של

$$DO:OB = 3:1$$

מצא את a אם נתון כי AP ו OK נפגשים.



הגדרת המכפלה הסקלרית

תרגיל 1

נתונים שני ווקטורים \underline{u} ו \underline{v} שהזווית ביניהם היא זווית של 120°

$$\underline{u} = 2, \quad \underline{v} = 3$$

חשב את ערך המכפלה הסקלרית הבאה:

$$(2\underline{u} - \underline{v}) + (\underline{u} + 5\underline{v})$$

תרגיל 2

נתונים שני ווקטורים \underline{u} ו \underline{v} כך ש: $|\underline{u}| = 2, \quad |\underline{v}| = 1$

והזווית בין שני הווקטורים היא זווית של 60° .

חשב את הזווית שבין הווקטור \underline{u} לווקטור $2\underline{v} + \underline{u}$

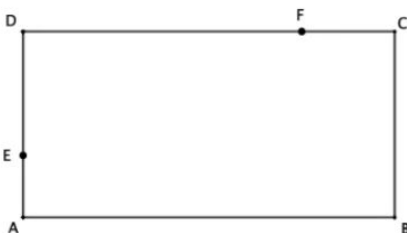
תרגיל 3

במלבן ABCD נסמן: $\overline{AD} = \underline{v}$ $\overline{AB} = \underline{u}$

כך ש: $|\underline{u}| = 2 \quad |\underline{v}| = 1$

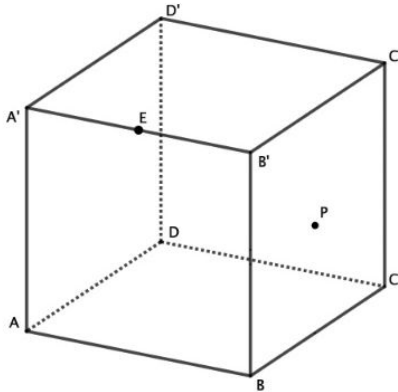
הנקודה E נמצאת על הצלע AD כך ש: $AE = \frac{1}{3}AD$

הנקודה F נמצאת על הצלע DC כך ש: $DF : FC = 3 : 1$



חשב את הזווית שבין הווקטור \overline{EF} לווקטור \overline{DB}

תרגיל 4



נסמן בקובייה $ABCD A'B'C'D'$ את הווקטורים הבאים:

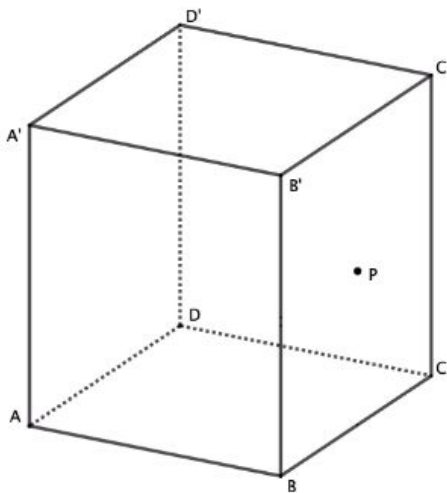
$$\overline{AB} = \underline{u}, \quad \overline{AD} = \underline{v}, \quad \overline{AA'} = \underline{w}$$

עוד נתון כי הנקודה E היא אמצע המקצוע $A'B'$

הנקודה P היא נקודה על הפאה $BCC'B'$ כך שהנקודה P נמצאת במרחקים שווים מהנקודות D, A, E

בטא את הווקטור \overline{AP} באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו \underline{w}

תרגיל 5



נסמן בתיבה $ABCD A'B'C'D'$

את הווקטורים הבאים: $\overline{AA'} = \underline{w}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AB} = \underline{u}$

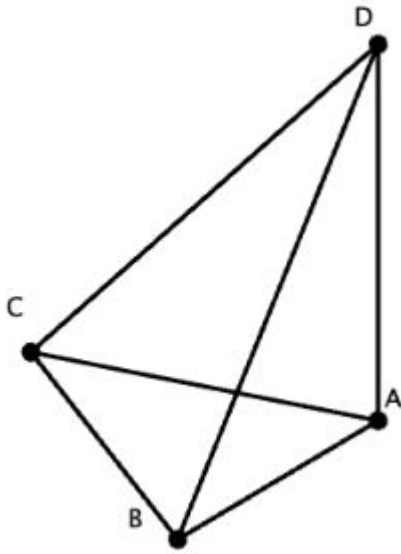
$$\text{נתון: } |u| = |v| = 1, \quad |w| = \sqrt{3}$$

הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} את הווקטור \overline{AP} כך שהנקודה P

נמצאת על האלכסון BC' והווקטור \overline{AP}

יוצר זוויות שוות עם הווקטורים \overline{AC} , $\overline{AC'}$.

תרגיל 6



נתון טטראדר ABCD כך שמתקיים: $AB \perp AC \perp AD$.
(המקצועות הצדדיים ניצבים זה לזה).

עוד נתון כי: $AB = AC = AD$

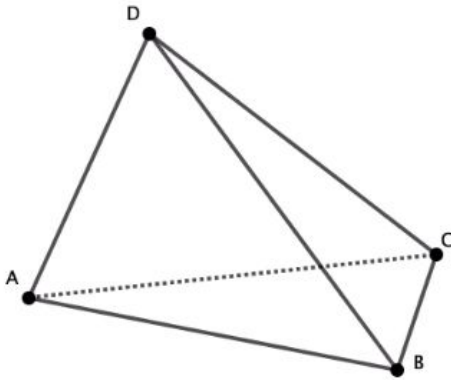
נסמן: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AC} = \underline{v}$, $\overline{AD} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על הפאה BCD והוקטור \overline{AP}
יוצר זוויות שוות עם הווקטורים \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} .

בטא את הוקטור \overline{AP} באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} .

תנאי ניצבות

תרגיל 1



בטטראדר ABCD הנקודה M היא מרכז הכובד של הפאה BCD.

נסמן: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AC} = \underline{v}$, $\overline{AD} = \underline{w}$

נתון: $\angle DAB = \angle DAC$, $|u| = |v|$

א. הבע את הווקטור \overline{AM} באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} .

ב. הוכח כי \overline{BC} ניצב למישור AMD.

הגדרת הוקטור האלגברי

תרגיל 1

א. נתונים שלושה ווקטורים : $u = (0, 2, 3)$, $v = (-3, 2, -6)$, $w = (-1, 7, 2)$

הצג את הווקטור הבא $2(u - v) + 3w$

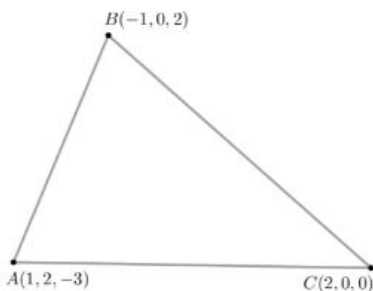
ב. נתון כי הווקטור שהצגת בסעיף א' יוצא מהנקודה $A(-1, 10, 5)$

מצא את נקודת הסיום של הווקטור.

תרגיל 2

קבע האם הווקטורים $x = (-2, 3, 5)$, $y = (10, -15, -25)$
 שמוצאים בראשית הצירים
 נמצאים על אותו הישר

תרגיל 3



קבע האם שלושת הנקודות הבאות נמצאות על אותו הישר : $(1, -1, 3)$, $(0, 1, 5)$, $(-3, -2, 1)$

תרגיל 4

נתון משולש ABC : $A = (1, 2, -3)$, $B = (-1, 0, 2)$, $C = (2, 0, 0)$

נסמן: $AB^{\rightarrow} = u$, $AC^{\rightarrow} = v$

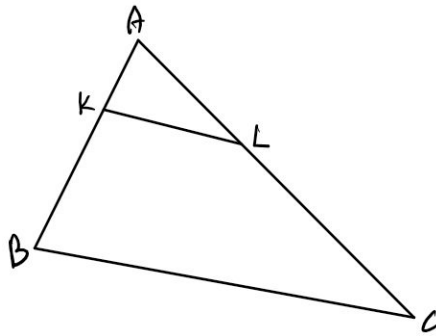
הנקודות S ו M מקיימות: $AS^{\rightarrow} = \frac{2}{3}AB^{\rightarrow}$, $AM^{\rightarrow} = \frac{1}{2}AC^{\rightarrow}$

1. מצא את ההצגה האלגברית של הווקטורים u ו v .
 2. הבע את הווקטורים SM^{\rightarrow} , SC^{\rightarrow} , MB^{\rightarrow} באמצעות u , v ו w .
 3. מצא את ההצגה האלגברית של הווקטורים SM^{\rightarrow} , SC^{\rightarrow} , MB^{\rightarrow}
 4. מצא את הקואורדינטות של הנקודות S ו M .
-

אורך של ווקטור

תרגיל 1

נתון משולש ABC כך ש $A(7, 9, 2)$, $B(8, 5, 4)$, $C(4, 3, 2)$, K ו L נקודות על הצלעות AB ו AC בהתאמה, כך ש KL מקביל לצלע BC של המשולש. (ראה איור)



האורך של KL שווה ל $\sqrt{\frac{3}{2}}$

מצא את הנקודות K ו L.

המכפלה הסקלרית בהצגה אלגברית

תרגיל 1

מצא לאילו ערכים של m
 הוקטורים הבאים ניצבים זה לזה
 $\underline{u} = (m, 1, -1)$ $\underline{v} = (6, -1, 5)$

תרגיל 2

בעבור שני הוקטורים $\underline{u} = (1, -1, 0)$, $\underline{v} = (-2, m, 1)$

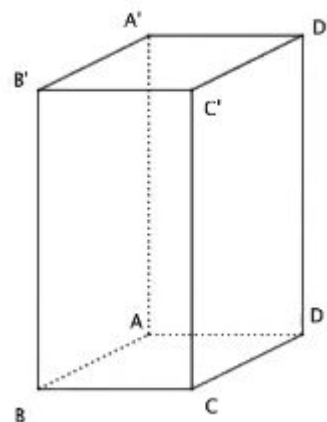
מה צריך להיות ערכו של m

כך שהזווית בין הוקטורים תהיה שווה ל- 135°

תרגיל 3

נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ כך שמתקיים: $AB = 1$, $AD = 3$, $AA' = 5$

- חשב את הזווית שבין האלכסון הראשי בתיבה AC' לאלכסון הבסיס AC
- מצא נקודה E על המקצוע CC' כך ש AE הוא חוצה זווית A במשולש $C'AC$.



דרגת חופש

תרגיל 1

מצא ווקטור (השונה מווקטור האפס) הניצב לווקטורים: $u = (4, 7, -1)$, $v = (3, -1, 3)$

הצגה פרמטרית לישר

תרגיל 1

האם הנקודה $(2, -4, 3)$ שייכת לישר העובר דרך הנקודות $A(3, -4, -1)$, $B(1, 2, 3)$?

תרגיל 2

מצא הצגה פרמטרית לישר הנתון בהצגה האלגברית : $y = 2x - 1$

תרגיל 3

מצא הצגה אלגברית לישר הנתון בהצגה הפרמטרית $x = (1, 1) + t(-2, 5)$

תרגיל 4

נתון הישר $x = (6, 3, -5) + t(-2, -1, 1)$

מצא את נקודות החיתוך (אם הן קיימות) של הישר עם הצירים: ציר ה- X וציר ה- Z .

מצב הדדי בין ישרים

תרגיל 1

מצא לאיזה ערך של m הישרים הבאים
מקבילים

$$\begin{cases} \underline{x} = (3, 1, 0) + t(0, m^2 - 10, 18) \\ \underline{x} = (-4, 1, -3) + s(0, 1, 3) \end{cases}$$

זווית בין ישרים

תרגיל 1

מצא את הזווית שבין שני הישרים הבאים:

$$\begin{cases} \underline{x} = (1, 2, 0) + t(-2, 1, -3) \\ \underline{x} = (-1, 6, -3) + s(2, 1, 4) \end{cases}$$

תרגיל 2

מצא הצגה פרמטרית לישר העובר דרך נקודת החיתוך של שני הישרים הנתונים ומאונך לשניהם:

$$\begin{cases} l_1 : \underline{x} = (2, -9, 3) + t(2, -1, 5) \\ l_2 : \underline{x} = (4, -10, 8) + s(6, 1, -8) \end{cases}$$

תרגיל 3

מצא הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1, 1, 1)$, ויוצר זווית של 30° עם הישר הנתון, וחותר אותו.

$$\underline{x} = (2, 1, 2) + t(1, 1, 2)$$

הצגה פרמטרית למישור

תרגיל 1

נתון הישר: $\vec{x} = (2, -1, 3) + t(1, 1, 2)$ והנקודה $A(2, 1, 0)$

- הוכח כי הנקודה A אינה שייכת לישר הנתון.
 - מצא את ההצגה הפרמטרית של המישור המוגדר על ידי הישר והנקודה A.
-

תרגיל 2

מצא הצגה פרמטרית למישור המכיל את הישר $\vec{x} = (1, -2, 1) + t(2, -3, 4)$ ומקביל לציר ה Z

תרגיל 3

מצא הצגה פרמטרית למישור העובר דרך הנקודה $(1, -4, 5)$ ומקביל למישור $[XY]$

הצגה כללית למישור

תרגיל 1

נתונות הנקודות $A(5, -3, 2)$, $B(-1, 6, 5)$

מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה A וניצב לישר AB

תרגיל 2

מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(5, 1, 2)$, $C(-1, 0, 0)$

תרגיל 3

נתונות שלוש נקודות: $A(0, 0, 0)$, $B(-1, k, 1)$, $C(-1, 7, -2)$. פרמטר $k > 0$.

נתון: $\angle BAC = 30^\circ$

א. מצא את ערך הפרמטר k .

ב. הראה כי הווקטור $(5, 1, 1)$ מאונך למישור ABC.

ג. D היא נקודה במישור ABC כך ש $\overline{AC} \perp \overline{CD}$. מצא הצגה פרמטרית של הישר CD.

מצב הדדי בין ישר למישור

תרגיל 1

נתון המישור: $mX + 3Y + Z + 3 = 0$ ונתון הישר: $X = (3, 0, -9) + t(2m, -5, 7)$

- מצא את הערך של m שעבורו הישר מוכל במישור.
- מצא את הערך של m שעבורו הישר חותך את המישור רק בנקודה אחת שבה $z = 5$, ומצא את הנקודה.

תרגיל 2

בואו נסתכל על דוגמה שהיא שני סעיפים משאלת בגרות מחורף 2006

נתון המישור π : $2X + 3Y - 4Z + 12 = 0$

ונתונות שתי נקודות: $A(k, k + 3, 4)$, $B(3k, 2k - 1, k + 1)$ (k פרמטר).

1. עבור איזה ערך של k הישר AB מקביל למישור π ואינו מוכל בו?

2. הראה כי הישר $l: X = (0, 0, 3) + r(1, 2, 2)$ נמצא במישור π .

מצב הדדי בין מישורים

תרגיל 1

בואו נסתכל על דוגמה שהיא סעיף משאלת בגרות מקיץ 2005

$$\pi_1: X - 2Y + Z - 5 = 0, \quad \pi_2: 2X + Y - 3Z = 0$$

נתונים שני המישורים:

מצא את ישר החיתוך שבין אותם המישורים.

(טוב, בבגרות ביקשו רק שתי נקודות על ישר החיתוך, אבל אנחנו נתקדם עוד קצת ונמצא ממש את ישר החיתוך שבין שני המישורים)

תרגיל 2

בואו נסתכל על דוגמה שהיא סעיף משאלת בגרות מקיץ 2006

ישר החיתוך שבין מישור π_1 למישור π_2 עובר דרך הנקודות $(2, -1, 2)$ ו $(0, 3, -1)$

המישור π_1 עובר דרך ראשית הצירים, והמישור π_2 עובר דרך הנקודה $(1, 3, 1)$.

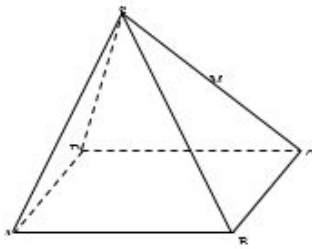
l_1 הוא ישר החיתוך בין המישור π_1 למישור YZ .

l_2 הוא ישר החיתוך בין המישור π_2 למישור XY .

מצא את המצב ההדדי בין שני הישרים l_1 ו l_2 .

זווית בין ישר ומישור

תרגיל 1



נתונה פירמידה SABCD שבסיסה מקבילית ($BC \parallel AD$)

הנקודה M היא אמצע המקצוע SC.

נתון: $A(0,7,-2)$ $B(-1,2,0)$ $C(3,1,3)$ $S(5,3,7)$

א. מצא את משוואת המישור הנקבע ע"י B, D, M.

ב. מצא את הזווית שבין המישור שמצאת בסעיף א'

ובין הישר הנקבע ע"י הנקודות S ו D.

תרגיל 2

נתון המישור $\pi: ax + by + cz = d$.

המישור π מכיל את הישר $\ell_1: \underline{x} = (4, 2, -5) + t(1, 1, -1)$.

א. הראה כי $a + b = c$.

נתון גם כי המישור π יוצר זווית של 30° עם הישר $\ell_2: \underline{x} = (1, -2, 3) + s(0, 1, 1)$.

ב. מצא את משוואת המישור π (מצא את שני הפתרונות).

ג. מבין שני המישורים שמצאת בסעיף ב, בחר במישור שחותך את ציר ה-x בחלקו

החיובי, ומצא את ההצגה הפרמטרית של ישר החיתוך בין המישור $[xy]$

למישור שבחרת.

זווית בין שני מישורים

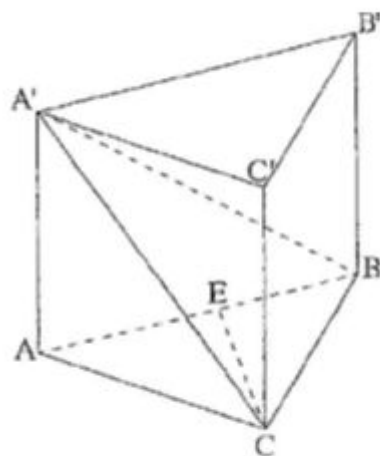
תרגיל 1

לאיזה ערך של הפרמטר m המישורים הבאים יוצרים ביניהם זווית של 70.53°

$$4y + mz - 10 = 0, \quad 2x + 2y + z + 1 = 0$$

תרגיל 2

חלק של שאלת בגרות משנת 2013, קיץ, מועד ב'



נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$

שבטיסה משולש שווה-צלעות.

הנקודה E נמצאת על המקצוע AB

כך ש- $AE = kAB$ ($0 < k < 1$).

א. נתון כי הזווית בין המישור $A'EC$

למישור ABC היא הזווית $A'EA$.

מצא את הערך של k .

נתון: $AC = 2$, $\angle A'EA = 45^\circ$.

הזווית בין המישור $A'EC$ למישור ABC היא $\angle A'EA$.

ב. חשב את הזווית בין המישור ABC למישור $A'BC$.

מרחק נקודה מישר

תרגיל 1

מצא את מרחקה של הנקודה $A(4,-2,7)$ מהישר $x=(-1,3,4)+t(-3,1,2)$

תרגיל 2

מצא את שתי הנקודות שעל הישר $l_1: (3,-2,1) + t(0,1,0)$ שמרחקן מהישר $l_2: (2,0,-1) + k(0,1,3)$ שווה ל $\sqrt{41}$.

מרחק בין ישרים מקבילים

תרגיל 1

בעבור שני הישרים המקבילים : $l_1: \vec{x} = (1,1,3) + t(1,0,2)$ $l_2: \vec{x} = (3,5,-3) + s(1,0,2)$

א. מצא הצגה פרמטרית לישר הנמצא במישור שני הישרים הנתונים ונמצא במרחק שווה משניהם.

ב. מצא את המרחק של הישר שמצאת בסעיף א' וכל אחד משני הישרים הנתונים.

מרחק נקודה ממישור

תרגיל 1

נתון המישור $4x - 7y + 4z + 14 = 0$ במרחק 5 יחידות ממנו נמצאת הנקודה $(1, m, -3)$. מצא את הערך של הפרמטר m .

תרגיל 2

נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1: 2x + y - 2z = 0$

$\pi_2: x - 2y + 2z = 0$

א. נקודה (x, y, z) נמצאת על ישר, הנמצא במרחק 3 יחידות ממישור π_1 ובמרחק 5 יחידות ממישור π_2 .

מצא הצגה פרמטרית של ישר אחד כזה (מבין ארבעה ישרים אפשריים).

מרחק בין שני מישורים

תרגיל 1

נתונה קובייה $ABCD A' B' C' D'$

הפאה $ABCD$ נמצאת על המישור $X + 2Y + 2Z = 2$

והפאה $A' B' C' D'$ נמצאת על המישור $X + 2Y + 2Z = 11$

א. חשב את נפח הקובייה.

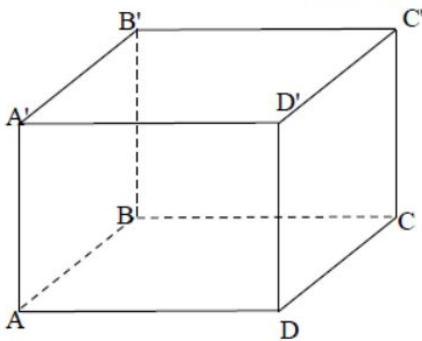
ב. נתון כי גם הפאה $ABB' A'$ נמצאת על המישור $2X + Y - 2Z = 14$

מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו

מונח המקצוע $C' D'$.

(יש למצוא שתי הצגות פרמטריות של $C' D'$ המתאימות

לשתי האפשרויות של הקובייה).



מרחק בין ישרים מצטלבים

תרגיל 1

מצא את המרחק בין שני הישרים המצטלבים הנתונים:

$$l_2 : x = (1, 2, 3) + s(1, 2, 0) \quad \vee \quad l_1 : x = (3, 2, -3) + t(0, 0, 1)$$
