©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

5math

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

חלק א׳ - הנגזרת והמשיק

שיעור 1 - נגזרות ומשיק לפונקציות רציונליות ופולינום

תרגיל 1

<u>סעיף משאלת בגרות משנת 2007</u>

נתונה הפרבולה $y = 2x^2 - x$.
בנקודה שעל הפרבולה שבה y=6 מעבירים משיק לפרבולה ששיפועו שלילי.
מצא את משוואת המשיק.

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

תרגיל 2

<u>סעיפים משאלת בגרות משנת 2013</u>

נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^2 + 4x + b$

$g(x) = -x^2 + c$

b ו־ c הם פרמטרים גדולים מ־ 0.

לגרפים של שתי הפונקציות יש משיק משותף בנקודה משותפת P .

א. הבע באמצעות b (במידת הצורך) את השיעורים של הנקודה P .

ב. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה f(x)

וסקיצה של גרף הפונקציה g(x) , אם ידוע כי $b > 4$.

הישר $x = a$ חותך את המשיק המשותף בנקודה D , את הגרף של f(x) בנקודה A

ואת הגרף של g(x) בנקודה B. (A , D ו־ B הן שלוש נקודות שונות).

ג. הראה כי הישר PD הוא תיכון במשולש PAB .

תרגיל 3

מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $y = x^2 - 3x + 2$,
העוברים דרך הנקודה $(-1 , -10)$

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

שיעור 2 - נגזרות ומשיק לפונק' שורש

תרגיל 1

גזור את הפונקציות הבאות:

א. $y = 5\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}}$

ב. $y = \frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+2}$

ג. $y = \sqrt{x^5 - 3x}$

תרגיל 2

בנקודה כלשהי על גרף הפונקציה $y = \frac{2}{3\sqrt{5x}}$ מעבירים משיק.
קטע המשיק החותך את מערכת הצירים מסתובב סביב ציר ה X
ועל ידי כך יוצר חרוט (ראה איור)
הוכח כי נפח החרוט אינו תלוי בנקודת ההשקה.
ז"א , הוכח שנפח החרוט המתקבל הוא נפח קבוע לכל החרוטים שנוצרו באופן זה.

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

שיעור 3 - נגזרות ומשיק לפונקציה טריגונומטרית

תרגיל 1

גזור את הפונקציות הטריגונומטריות הבאות

א. $y = x^3 \sin x$

ב. $y = x \cdot \sin\frac{x}{3}$

ג. $y = \frac{\cos x}{x}$

ד. $y = \sin x \cdot \cos x$

ה. $y = 4\tan x - x^2$

ו. $y = \frac{1}{3}\tan(3x)$

ז. $y = \sin^2(5x)$

תרגיל 2

פתור את אי השוויון : $\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \quad , \quad -\pi \le x \le 2\pi$

תרגיל 3

פתור את אי השוויון : $\cos^2 x - \cos x > 0 \quad , \quad -\pi \le x \le \pi$

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

תרגיל 4

(תרגיל מבוסס על תרגיל בגרות במועד 1997)

הפונקציה $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x - 2\cos x + 1$ מוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

א. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה שבהן שיפוע הפונקציה שווה לאפס.

ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה בתחום הנתון.

שיעור 4 - נגזרות לפונקציה המעריכית

תרגיל 1

גזור את הפונקציות הבאות:

א. $y = 2e^{2x} + 5e^{x} + 10$

ב. $y = \frac{e^x}{x^2+1}$

ג. $y = \frac{(x-1)^2}{e^{2x}}$

ד. $y = \sin x \cdot e^{\cos x}$

ה. $y = 3^{x^2}$

ו. $y = (2^x + 3^x) \cdot 4^{-\sin(x^2)}$

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

שיעור 5 - נגזרת לפונקציה הלוגריתמית

תרגיל 1

גזור את הפונקציות הבאות:

א. $y = \ln(2x^2 - 3)$

ב. $y = \frac{2-\ln(2x)}{\ln x}$

ג. $y = \ln^4 x$

ד. $y = \log_3 x + 4$

ה. $y = \frac{x}{\log x}$

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

חלק ב׳ - חקירת פונקציות

שיעור 1 - נקודות קיצון

תרגיל 1

מצא את נקודות תחומי העלייה והירידה, את נקודות הקיצון וקבע את סוגיהן בעבור הפונקציה הבאה : $y = \frac{5x+1}{x+2}$

תרגיל 2

מצא את נקודות הקיצון ותחומי העלייה והירידה לפונקציה הבאה: $y = x + \frac{1}{x}$

תרגיל 3

מצא את נקודות הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה הבאה :

$$y(x) = \frac{1}{\sin(x)} \quad , \quad -0.75\pi < x \leqslant 0.75\pi$$

תרגיל 4

שאלת בגרות ממועד קיץ 2004

נתונה הפונקציה $f(x) = a\sin^3 x - 3b\sin x$ בתחום $0 \le x \le \pi$.

ישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$, מקביל לציר ה x.

א. הראה כי $a = 4b$.

ב. נתון: $b > 0$. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון (הבע באמצעות b לפי הצורך), וקבע את סוגן.

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

שיעור 2 - אימפטוטות ונקודות סינגולריות

תרגיל 1

מצא את האסימפטוטה האנכית והנקודה הסינגולרית של הפונקציה הבאה: $y = \frac{x^2-2x}{x^2-6x+8}$

תרגיל 2

תרגיל ממבחן בגרות מועד קיץ 1996

נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{a^2-x^2}{(x-1)^2}$, $a>1$ (a פרמטר).

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת נקודות החיתוך עם הצירים (מובעות ע"י a).

ב. מצא אסימפטוטות לפונקציה המקבילות לצירים.

ג. מצא את נקודת המינימום של הפונקציה (מובעת באמצעות a).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תרגיל 3

תרגיל ממבחן בגרות מועד קיץ 2000

נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{(x-2B)^2}{(x-B)^4}$, $B>0$ (B פרמטר).

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. מצא את ערכי x שעבורם $f'(x)=0$.

ה. מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

שיעור 3 - חלוקת פולינומים

תרגיל 1

שכתב את הפונקציה הרציונלית $f(x)=\frac{2x^4+6x^3-3x^2-15x-5}{2x^2-5}$ לפונקציית פולינום

שיעור 4 - נקודות פיתול ותחומי קעירות

תרגיל 1

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1$

a הוא פרמטר , a>0.

מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך) את שיעורי ה X של נקודות הפיתול של הפונקציה

תרגיל 2

שאלת בגרות מועד קיץ 2007

.נתונה הפונקציה $f(x)=8\sin^2 x-\cos 4x$ בתחום $0\le x\le\frac{4\pi}{5}$.

א. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. מצא את התחום שבו הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$, ואת התחום שבו הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום הנתון.

ג. מצא כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=0$ בתחום הנתון. נמק.

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

תרגיל 3

(בגרות קיץ 08 מועד ב')

נתונה הפונקציה $y = 2x^2 - \frac{a^3}{2x}$.

א. עבור $a > 0$ מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

(1) את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(2) את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה),וקבע את סוגן.

(4) את תחומי הקעירות של הפונקציה כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור $a > 0$.

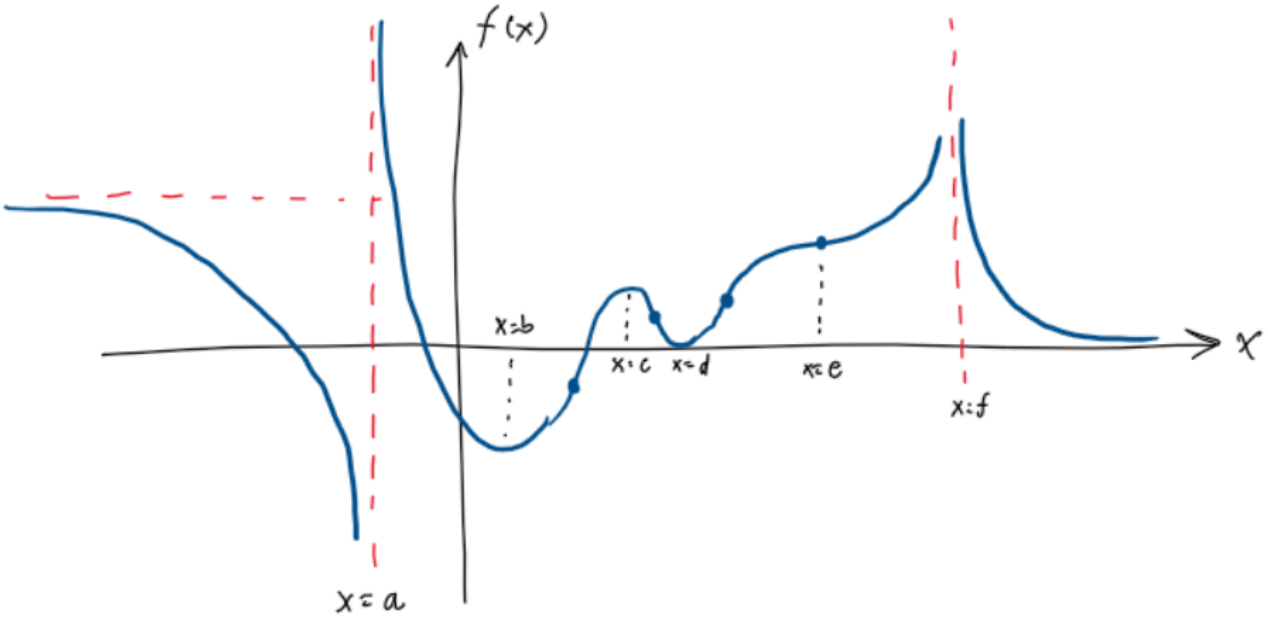
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור $a < 0$. הסבר את שיקוליך בסרטוט הגרף.

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

שיעור 6 - הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

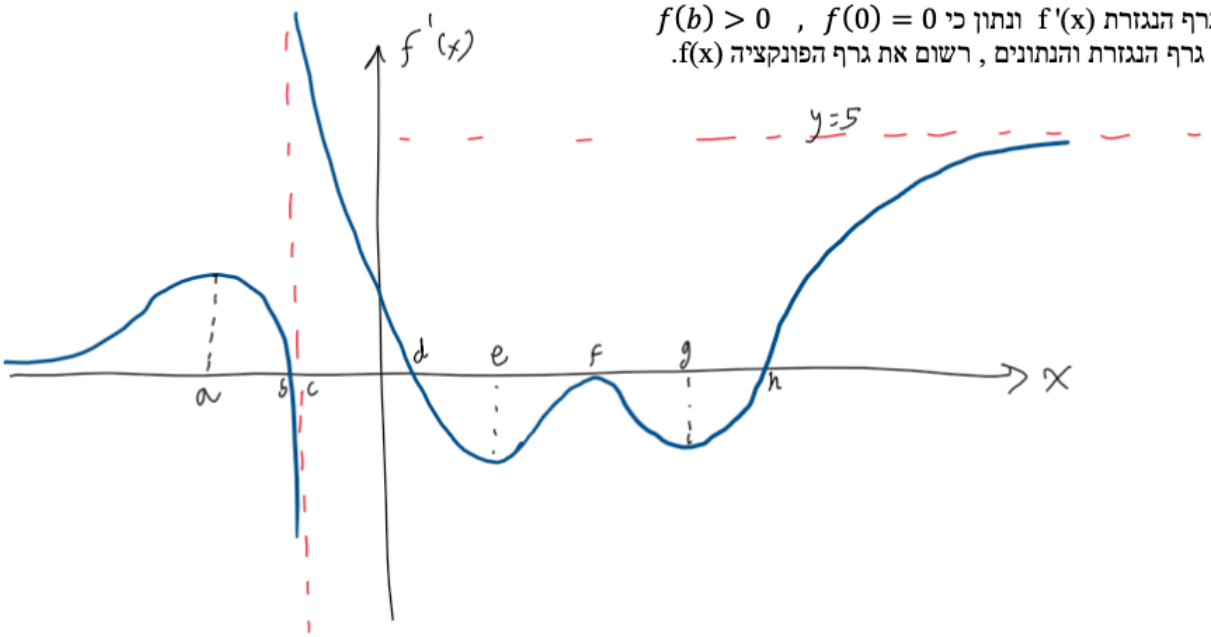
תרגיל 1

רשום את גרף הנגזרת על פי גרף הפונקציה



תרגיל 2

נתון גרף הנגזרת f'(x) ונתון כי $f(0) = 0$, $f(b) > 0$
על פי גרף הנגזרת והנתונים , רשום את גרף הפונקציה f(x).



©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

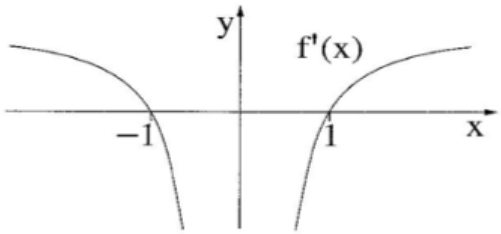
תרגיל 3

בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

האסימפטוטה <u>היחידה</u> של הפונקציה $f(x)$ היא $x = 0$.

נתון כי יש פתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = 2$

ופתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = -2$.

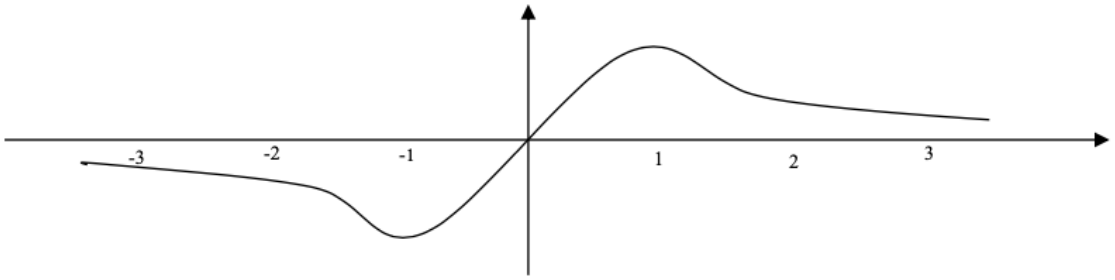


א. רק על פי נתוני השאלה,

סרטט סקיצה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

תרגיל 4

בציור להלן משורטטת סקיצה של הגרף של פונקצית הנגזרת $g'(x)$:



על סמך ציור זה בלבד, שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם נתון ש $g(0) = 0$.

סמן בסקיצה את שיעורי x של נקודות הפיתול של $g(x)$.

הסבר את השיקולים שעל פיהם שרטטת את הסקיצה.

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

תרגיל 5

בציור שלפניך מוצגים הגרפים I ו II (I הוא הגרף העליון, II הוא התחתון)

בתחום $0 \le x \le 5$

אחד הגרפים הוא סקיצה של הפונקציה $f(x)$

והאחר של פונקצית הנגזרת $f'(x)$.

א. איזה גרף, I או II, הוא של

הפונקציה $f(x)$? נמק.

ב. בנקודה A $(x_A = 3)$ שעל גרף I העבירו משיק לגרף.

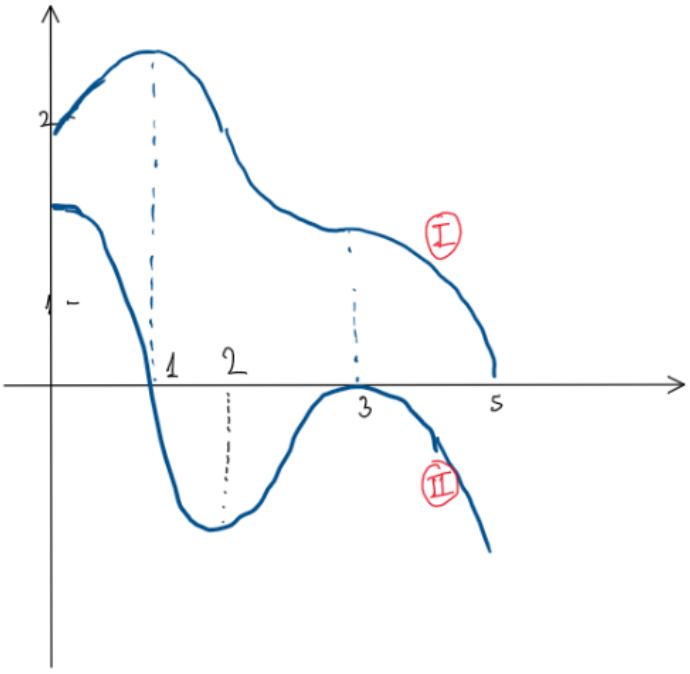
מה הוא שיפוע המשיק? נמק.

ג. (1). סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f''(x)$ בתחום $0 \le x \le 5$, אם נתון כי

שיפוע הישר, המשיק לגרף II בנקודה שבה $x = 0$, הוא אפס.

הסבר את שיקוליך בסרטוט הגרף.

(2). מה הם שיעורי ה x של נקודות הפיתול של $f(x)$ בתחום $0 < x < 5$ נמק.



©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

תרגיל 6

א. נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה רציונלית המקיימת:

- לפונקציה יש שלוש אסימפטוטות: $x=4$, $x=-1$, $y=0$
- הפונקציה מוגדרת לכל $x \neq -1$ ו־ $x \neq 4$
- $f(0)>0$
- $f(1.5)=0$
- $f'(x)<0$ רק עבור $-1<x<4$
- $f(x)<0$ עבור $x>4$ ו־ $f(x)>0$ עבור $x<-1$

(1) על פי הנתונים שבסעיף זה, סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) על פי הגרף שסרטטת, הראה כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון בתחום $-1<x<4$, וקבע את סוגה. נמק.

אין צורך למצוא את השיעורים של נקודת הקיצון.

ב. נתון גם כי הפונקציה $f(x)$ מקיימת $f(x)=\frac{3a-3bx}{(x^2-ax+c)^2}$.

a , b ו־ c הם פרמטרים.

מצא את השיעורים של נקודת התיתוך של הישר $x=-2$ עם גרף הפונקציה $f(x)$.

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

שיעור 7 - טרנספורמציות

תרגיל 1

נתונה הפונקציה $f(x)$, ונתון כי כל אחת מהפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו־ $f''(x)$

מוגדרת בתחום $x > 0$.

נתון גם: הגרף של $f'(x)$ חותך את ציר ה־ x בנקודה שבה $x = 1$,

$f'(x)$ עולה בתחום $0 < x < 3$, ויורדת בתחום $x > 3$,

האסימפטוטות של $f'(x)$ הן $x = 0$ ו־ $y = 0$.

א. סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתון גם כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אחת שמשוואתה $x = 0$.

ב. מצא את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה),

וקבע את סוגן.

ג. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. הפונקציה $f(x)$ מקבלת את כל הערכים בטווח $y \geq 4$ ורק אותם.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ציין על ציר ה־ x ועל ציר ה־ y את הערכים שמצאת.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = -[f(x)]^3$.

מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

תרגיל 2

נתונה הפונקציה $f(x)=a-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}$. a הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה־ x .

ב. מצא את a .

הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)=|f(x)+k|$.

ידוע שגרף הפונקציה $g(x)$ משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $f(x)$.

מצא את k (מצא את שתי האפשרויות). נמק את תשובתך.

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

תרגיל 3

$f(x)$ היא פונקציה גזירה, המוגדרת לכל x, כך ש- $f(x) \neq 0$ לכל x.

א. הוכח שאם הפונקציה $f(x)$ עולה בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יורדת באותו הקטע;

ואם הפונקציה $f(x)$ יורדת בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ עולה באותו הקטע.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$, המוגדרת לכל x.

ב. האם קיים x שבעבורו $g(x) = 0$? נמק.

ג. (1) האם הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית? נמק.

(2) הראה שלכל x מתקיים: $g(x) = g(x + 2\pi)$.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0 \le x \le \pi$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\pi \le x \le 3\pi$.

נתונה הפונקציה $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$.

ענה על סעיף ד. תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ד. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$? נמק.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$ באותה מערכת צירים שבה סרטטת את גרף הפונקציה $g(x)$.

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

תרגיל 4

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3x}{4x^2-1}$ שתחום הגדרתה הוא $x\neq\pm\frac{1}{2}$.

א. **(1)** מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=\sqrt{\frac{3x}{4x^2-1}}$.

ב. **(1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים?

נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש בדיוק נקודת פיתול אחת. שיעור ה־ x של נקודה זו קטן מאפס.

ג. **(1)** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $g'(x)$.

ד. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)=\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{4x^2-1}}$?

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

תרגיל 5

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{(x+1)(x-a)}}{x-2}$. $a>2$ הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע באמצעות a אם צריך.

א. **(1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

נתון: $f(a+2)=-f(2-a)$.

ב. מצא את a .

הצב $a=5$ וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. **(1)** מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x+2)$.

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

שיעור 8 - חקירה לפונקציה המעריכית

תרגיל 1 (ארבע דוגמאות)

מצא את ה אסימפטוטות של הפונקציה $f(x) = e^x$

מצא את ה אסימפטוטות של הפונקציה $f(x) = x \cdot e^{-x}$

מצא את ה אסימפטוטות של הפונקציה $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-9}$

מצא את ה אסימפטוטות של הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{x^3+6x^2}$

תרגיל 2 (שתי דוגמאות)

מצא את ה אסימפטוטות של הפונקציה $f(x) = \frac{3}{e^{2x}-e^2}$

מצא את ה אסימפטוטות של הפונקציה $f(x) = \frac{e^x-2}{e^{2x}-5e^x+6}$

תרגיל 3

מצא את ה אסימפטוטות של הפונקציה $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

תרגיל 4

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{x^2}-2x}{e^{x^2}}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

היעזר בתשובותיך על סעיף א וענה על סעיף ב.

ב. (1) הסבר מדוע הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x .

(2) מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, ומה סוגן? נמק את תשובתך.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(4) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
נמק את תשובתך.

(5) הוסף לסרטוט של גרף הפונקציה $f(x)$ סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

תרגיל 5

נתונה משפחת הפונקציות $f(x)=\frac{e^{-mx}}{1+x^2}$. m הוא פרמטר.

ענה על הסעיפים א-ב בעבור $m \geq 0$.

א. **(1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציות $f(x)$?

(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציות $f(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

(3) נתון כי כל הפונקציות $f(x)$ מן המשפחה חותכות זו את זו בנקודה אחת. מצא את שיעוריה.

ב. **(1)** בעבור $m \geq 0$, מצא את הערכים של m שבעבורם הנגזרת $f'(x)$:

(i) אינה מתאפסת בשום נקודה.

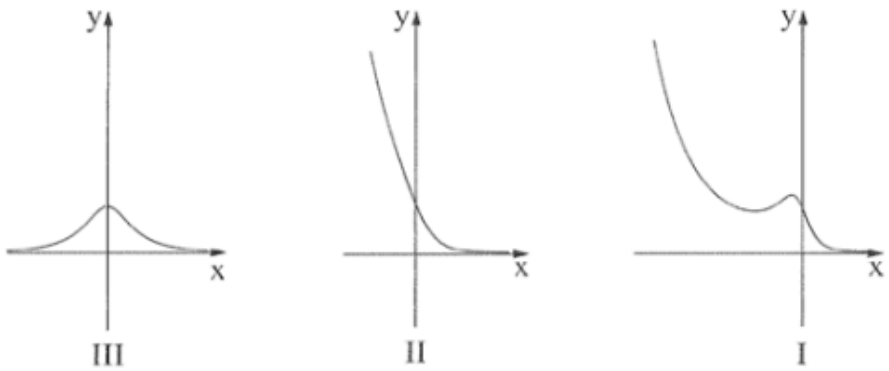
(ii) מתאפסת בנקודה אחת בדיוק.

(iii) מתאפסת בשתי נקודות בדיוק.

(2) בסוף השאלה נתונים שלושה גרפים (I-III) של פונקציות מן המשפחה $f(x)$ בעבור $m \geq 0$.
ידוע כי $m \neq 1$ וכי כל אחד מן הגרפים מתאים לערך או לטווח ערכים אחר של m .
הַתְאֵם לכל גרף מבין השלושה את הערך או את טווח הערכים של m המתאים לו. נמק.

ענה על סעיף ג. תוכל להיעזר בגרף המתאים מבין הגרפים I-III .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(-x)$ בעבור $0 < m < 1$.



©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

תרגיל 6

נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}-ae^{x}+3}$. a הוא פרמטר.

הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת בעבור $x=0$.

א. (1) מצא את a ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

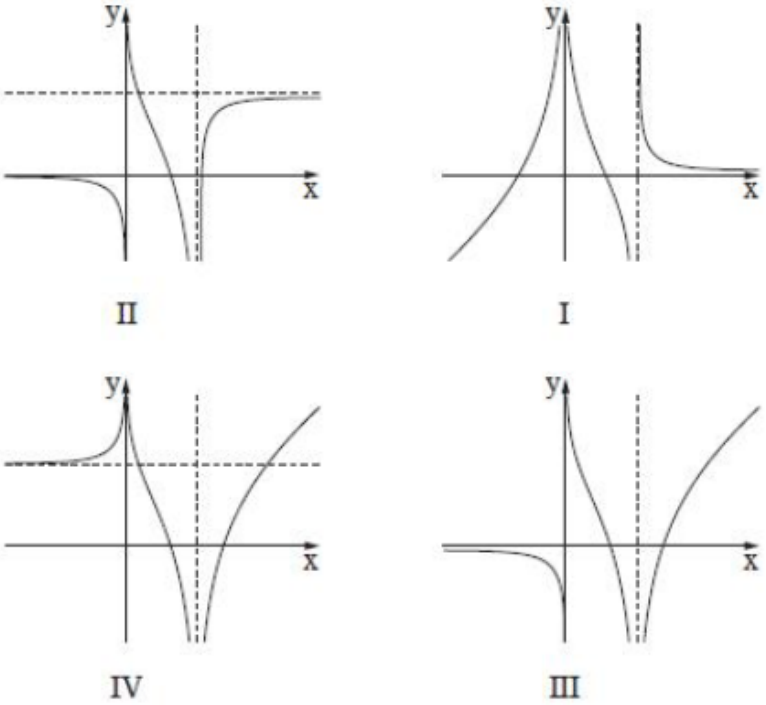
ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. אחד מן הגרפים I-IV שבסוף השאלה מתאר פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$, המוגדרת בתחום ההגדרה של $f(x)$.

איזה מהם מתאר אותה? נמק.

ד. נתונה הפונקציה $h(x)=f(x+k)$.

עבור איזה ערך של $k\neq 0$ יש לפונקציה $h(x)$ אסימפטוטה שמשוואתה היא $x=0$? נמק.



©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

שיעור 9 - חקירה לפונקציה הלוגריתמית

תרגיל 1 (שלוש דוגמאות)

מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x) = x \cdot \ln x$

מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)}$

תרגיל 2

נתונה הפונקציה $f(x) = \ell n \frac{a+x}{a-x}$. a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה f(x) .

(2) את שתי האסימפטוטות של הפונקציה f(x) המאונכות לציר ה־ x .

(3) את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה f(x) (אם יש כאלה).

(4) את השיעורים של נקודות הפיתול של הפונקציה f(x) (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה f(x) .

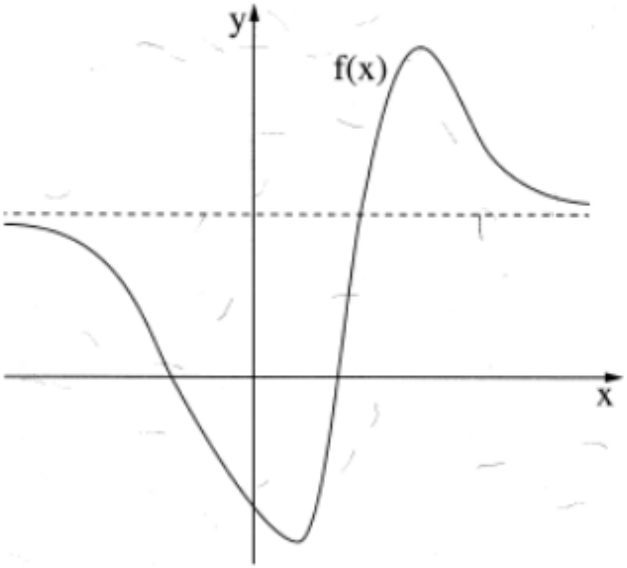
ג. הישר $y = x$ משיק לגרף הפונקציה f(x) בנקודת הפיתול שלה.

לפונקציה f(x) ולפונקציית הנגזרת f'(x) יש אותו תחום הגדרה.

סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת f'(x) . ציין בגרף את הערכים המספריים של האסימפטוטות ושל נקודות החיתוך עם הצירים (אם יש כאלה).

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

תרגיל 3



בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$

מוגדרות לכל x .

לגרף הפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה

אופקית אחת שמשוואתה $y = 1.5e$

כמתואר בציור.

נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הן:

$A(4\,,3e)$, $B(1\,,-1.5e)$.

הנקודות $C(-2\,,0)$, $D(2\,,0)$, $E(5\,,2e)$,

נמצאות על גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום $x < -2$ ובתחום $2 < x < 5$,

וקעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום $x > 5$ ובתחום $-2 < x < 2$

א. מצא את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, וקבע את סוגן. נמק.

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = \ln[f(x)]$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של $g(x)$ המאונכות לציר ה־ x .

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה),

וקבע את סוגן.

(4) לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אופקית אחת שמשוואתה $y = \ln(1.5e)$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

תרגיל 4

הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)=\ell n(f(x))$ מוגדרות וגזירות לכל x.

א. הראה כי לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $\ell n(f(x))$ יש נקודות קיצון באותם שיעורי x ושנקודות הקיצון הללו הן מאותו הסוג (מינימום/מקסימום).

בציור שלפניך מתואר גרף של פונקציה $f(x)$, כך ש־ $f(x)$ ו־ $g(x)=\ell n(f(x))$ מוגדרות וגזירות לכל x.

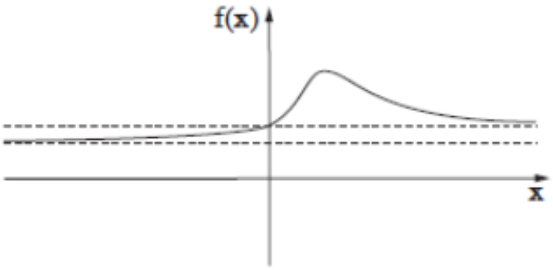
לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון יחידה ששיעוריה הם $(1,2)$,

ושתי אסימפטוטות:

אסימפטוטה שמשוואתה היא $y=1$,

ואסימפטוטה נוספת שמשוואתה היא $y=\frac{2}{3}$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־ y כאשר $y=1$.



ענה על סעיף ב בהסתמך על הגרף המתואר בציור.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמק.

(2) מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$?

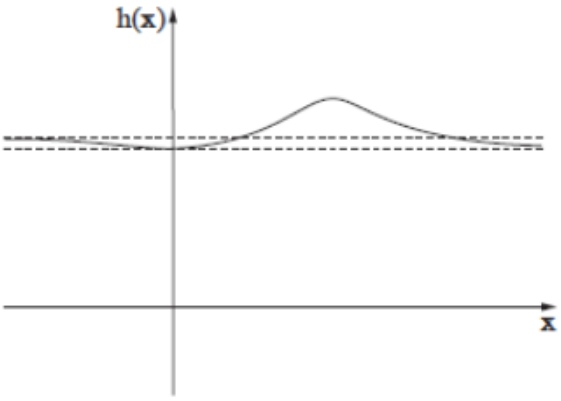
(3) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים?

(4) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$. נמק.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נגדיר: $h(x)=f(x)-g(x)$.

לפניך סרטוט של גרף הפונקציה $h(x)$.



ג. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$.

קבע את סוגן בעזרת הגרף.

(2) הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$

כך שהקטע AB מאונך לציר ה־ x.

מהו שיעור ה־ x שבעבורו אורך הקטע AB הוא 1?

נמק.

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

שיעור 10 - תרגילים משולבים למעריכיות ולוגריתמים

תרגיל 1

נתונה הפונקציה: $f(x)=\ell n(e^{2x}+b)$. $b>0$ הוא פרמטר.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

נתונה הפונקציה: $g(x)=\ell n(e^{x}+be^{-x})$.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ג. **(1)** הוכח: $f(x)-g(x)=x$.

(2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ (אם צריך, הבע באמצעות b).

נתון כי נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)$ נמצאת על האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את ערך הפרמטר b .

ה. הצב $b=4$ וסרטט במערכת צירים אחת סקיצה של הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$.

תרגיל 2

$f(x)$ היא פונקציה גזירה לכל x בתחום ההגדרה שלה.

א. הראה שלפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $e^{f(x)}$ יש נקודות קיצון באותם שיעורי x , ונקודות הקיצון האלה הן מאותו סוג (מינימום או מקסימום).

נתון כי $f(x)=x\ell n(x^{n})$. n הוא פרמטר טבעי.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. התייחס לערכים שונים של n .

ג. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x . התייחס לערכים שונים של n .

נתון: גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות.

ד. **(1)** הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא אי־זוגית.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם צריך — הבע באמצעות n).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $n=2$.

ה. היעזר בתשובתך על סעיף א, מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $e^{x\ell n(x^{n})}$ (n טבעי), וקבע את סוגן (אם צריך — הבע באמצעות n).

©כל הזכויות שמורות לשי חכימי ו 5math

תרגיל 3

נתונה הפונקציה: $f(x)=\ell n\left(\left(e^x-b\right)^2+1\right)$. b הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות b .

א. **(1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) נמק מדוע $f(x)\geq 0$ בכל תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את המשוואה של האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

(4) קבע בעבור אילו ערכים של b יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון,

ואם יש כזאת, מצא את שיעוריה, והראה שהיא נקודת מינימום.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $b=2$.

ב. מצא את כל הערכים של b שבעבורם הישר $y=\ell n5$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ג. נתון כי בעבור אחד מן הערכים של b שמצאת בסעיף ב, אין לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון.

בעבור הערך הזה של b , קבע אם הפונקציה $f(x)$ עולה או יורדת. נמק.